

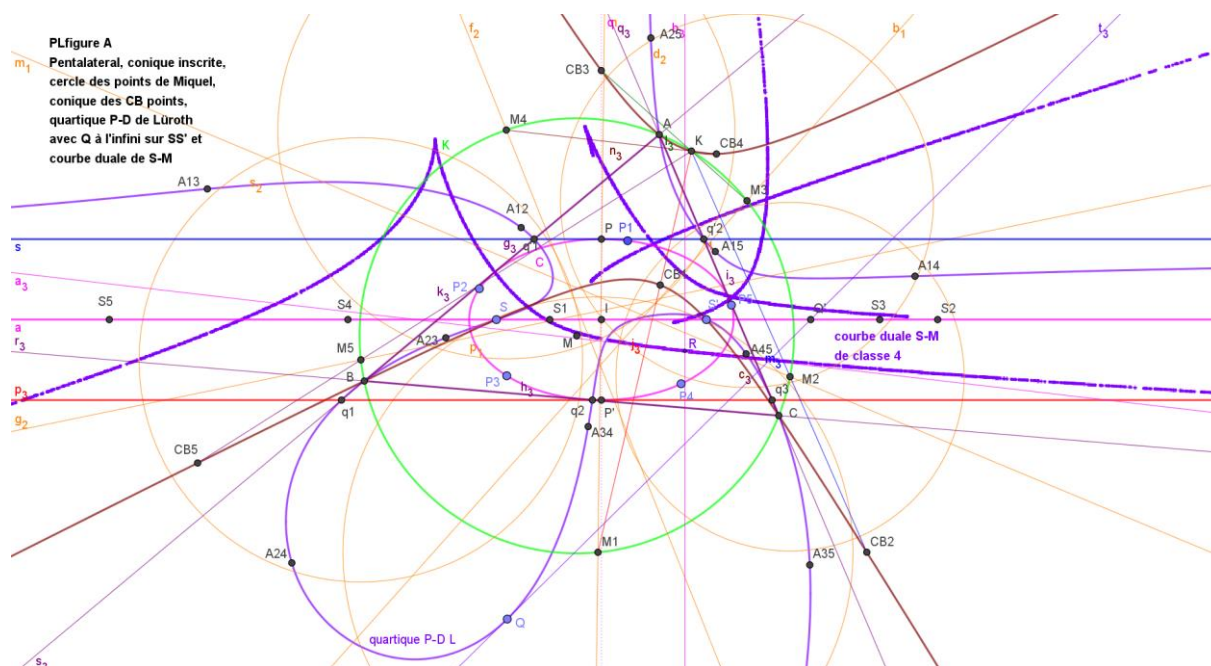
Bernard Keizer  
(bernard.keizer@wanadoo.fr)

Le Buy (Dordogne 24), décembre 2020

## Porisme de Poncelet

### Courbes duales de Poncelet-Darboux et de Siebeck-Marden

#### Exemples tirés du triangle, du Quadrilatère Complet et du Pentalatéral



### ***Résumé***

Ce 8<sup>ème</sup> article (\*) présente le porisme de Poncelet et les courbes duales de Poncelet-Darboux et de Siebeck-Marden en utilisant la dualité pôle/polaire par rapport à une conique. Un grand nombre d'exemples sont à trouver dans le triangle, le quadrilatère complet et le pentalatéral.

### ***Abstract***

This 8<sup>th</sup> (\*) article pops up the Poncelet's porism and the dual curves of Poncelet-Darboux and Siebeck-Marden using the pole/polar duality wrt a conic. A great number of examples are to find in the triangle, the complete quadrilateral and the pentalateral.

### ***Zusammenfassung***

Dieser 8te Artikel stellt den Poncelet's Porism und die duale Poncelet-Darboux und Siebeck-Marden Kurven mit Hilfe der Pole/Polar Dualität bezüglich eines Kegelschnitts dar. Manche Beispiele sind im Dreieck, im vollständigen Vierseits und im Fünfseits zu finden.

### ***Introduction***

Le point de départ de cet article a été la découverte sur le Net, en illustration des courbes de Poncelet, des 3 figures tirées d'un article de Isabelle Chalendar (\*\*). L'auteur appelle ces courbes respectivement ellipse de Poncelet avec triangles, courbe symétrique de Poncelet avec quadrilatères et courbe asymétrique de Poncelet avec pentagones (voir figures IC1, IC2 et IC3). Ces courbes sont des courbes de Siebeck-Marden de classes 2, 3 et 4, duales par rapport à un cercle d'une conique, d'une cubique et d'une quartique. On présente le porisme de Poncelet et les courbes duales de Poncelet-Darboux et de Siebeck-Marden ainsi que les nombreux exemples tirés du triangle, du quadrilatère complet et du pentalatéral avant de revenir sur les 3 figures de Isabelle Chalendar.

(\*) Bernard Keizer La Géométrie du Quadrilatère Complet 2013

Le Quadrilatère Complet et la Stelloïde Cubique 2014

Le Triangle, le Quadrilatère Complet, la Stelloïde Cubique et la transformation  $\psi$  2015

Le Quadrangle et le Quadrilatère Complets comme figures duales et leurs isocubiques 2016

Un joli puzzle géométrique 2017

Cayley-Bacharach, Marden et Siebeck 2018

Récréations sur le Quadrangle et le Quadrilatère Complets, Transformation de Cayley-Bacharach et Géométrie du Pentangle 2019

<http://bernardkeizer.blogspot.com/>

(\*\*) Isabelle Chalendar, Pamela Gorkin and Jonathan Partington Inner functions and operator theory ResearchGate mars 2015

## Sommaire

### Introduction

#### A. Courbes de Poncelet-Darboux et Siebeck-Marden

- 1) Porisme de Poncelet
- 2) Courbes de Poncelet-Darboux ou P-D
- 3) Courbes de Siebeck-Marden ou S-M

#### B. Cas du triangle

Chaîne de coniques

#### C. Cas du Quadrilatère Complet ou QC

- 1) 4 droites, 6 sommets, point de Miquel et transformation  $\psi$
- 2) Cubiques P-D vs conique inscrite
- 3) Conique inscrite vs courbes de S-M de classe 3

#### D. Cas du Pentalatéral ou PL

- 1) 5 droites, 10 sommets, cercle des points de Miquel et conique inscrite
- 2) 5 droites, 5 cubiques de Van Rees et transformation  $\Psi$
- 3) Quartiques P-D de Lüroth vs conique inscrite
- 4) Conique inscrite vs courbes de S-M de classe 4

### Annexe : 3 figures de Isabelle Chalendar

### Bibliographie

## Figures

A) Pentalatéral, conique inscrite, cercle des points de Miquel, conique des C-B points, quartique Poncelet-Darboux de Lüroth et courbe duale de Siebeck-Marden

- 1) Triangle et 2 cercles (circonscrit et inscrit)
  - 2) Conique de Poncelet-Darboux par les 3 sommets d'un triangle
  - 3) Cubique de Poncelet-Darboux par les 6 sommets d'un QC
  - 4) Quartique de Poncelet-Darboux par les 10 sommets d'un PL
  - 5) Conique de Siebeck-Marden de classe 2 tangente aux 3 côtés d'un triangle
  - 6) Courbe de Siebeck-Marden de classe 3 tangente aux 6 côtés d'un QA
  - 7) Quartique de Siebeck-Marden de classe 4 tangente aux 10 côtés d'un PA
- 
- 8) Triangle et chaîne de coniques duales
- 
- 9) QC : 4 droites, 6 sommets, point de Miquel et transformation  $\psi$
  - 10) 2 cubiques dégénérées circonscrites vs conique inscrite
  - 11) Cubique circulaire focale de Van Rees de P-D vs conique inscrite
  - 12) Conique inscrite vs courbe duale de S-M de classe 3
- 
- 13) PL : 5 droites, 10 sommets, cercle des 5 points de Miquel et conique inscrite
  - 14) 5 transformations  $\psi$  et 5 cubiques VR
  - 15) Cercles circonscrits  $C(Q)$  et point  $\omega$
  - 16) Conique des C-B points, points K, A, B et C et transformation  $\Psi$
  - 17) Construction d'une quartique circulaire avec la transformation  $\Psi$  (Q, Q1, Q2 et Q3)
  - 18) Quartique P-D de Lüroth formée de 2 coniques vs conique inscrite
  - 19) Quartique circulaire P-D de Lüroth avec Q point à l'infini sur  $SS'$
  - 20) Conique inscrite vs courbe de S-M de classe 4 formée des 2 coniques duales
  - 21) Courbe de S-M de classe 4 duale de la quartique P-D L avec Q à l'infini sur  $SS'$
- 
- IC1) Coniques de P-D et S-M duales par rapport à un cercle
  - IC2) Cubique de P-D et courbe de classe 3 de S-M duales par rapport à un cercle
  - IC3) Quartique de P-D L et courbe de classe 4 duales par rapport à un cercle

Ces figures ont été réalisées avec Geogebra version 5.0

### *Remerciements*

Mes remerciements vont d'abord aux 3 maîtres qui m'ont permis de mener à bien cette aventure : Clark Kimberling pour le triangle (\*), Chris van Tienhoven pour le QA/QC (\*\*) et le PA/PL et Bernard Gibert pour les cubiques (\*\*\*). Ils vont ensuite en particulier à Eckart Schmidt (\*\*\*\*) avec lequel nous avons partagé sur le forum ces recherches et découvertes.

- (\*) Clark Kimberling Encyclopedia of Triangle Centers ou ETC [www.faculty.evansville.edu](http://www.faculty.evansville.edu)  
 (\*\*) Chris van Tienhoven Encyclopedia of Quadrifigures ou EQF [www.chrisvantienhoven.nl](http://www.chrisvantienhoven.nl)  
 (\*\*\*) Bernard Gibert Cubics in the Triangle Plane <https://bernard-gibert.pagesperso-orange.fr>  
 (\*\*\*\*) Eckart Schmidt <http://eckartschmidt.de>

EQF est complété par une partie Encyclopedia of Polygon Geometry ou EPG et le site du forum <https://groups.io/g/Quadri-and-Poly-Geometry> contient 3 liens vers ETC, EQF et EPG.

## A. Courbes de Poncelet-Darboux et Siebeck-Marden

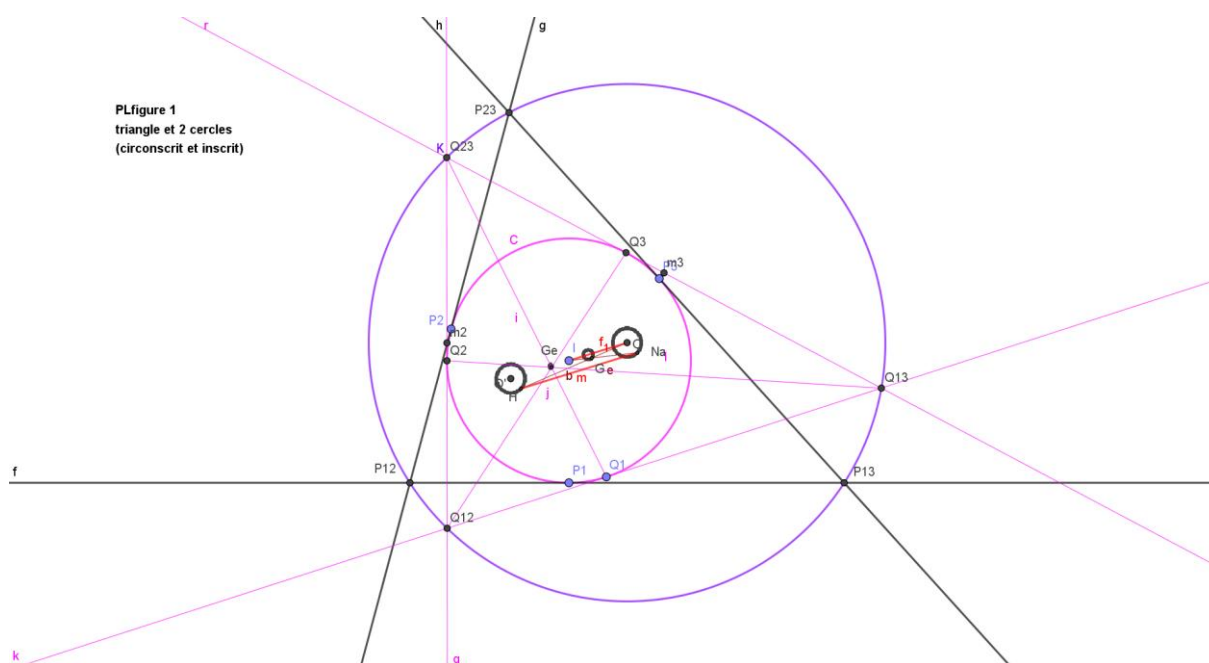
### 1) Porisme de Poncelet (cf figure 1)

- Porisme

Un porisme est une propriété généralement non vérifiée qui, si elle est vérifiée pour un cas, l'est pour une infinité de cas.

- Triangle et cercles circonscrit et inscrit

Un triangle et ses 2 cercles circonscrit et inscrit constituent un exemple simple du porisme de Poncelet. Il existe une infinité de triangles, dits bicentriques, ayant les mêmes cercles circonscrit et inscrit. La relation d'Euler lie les rayons  $R$  et  $r$  des 2 cercles et la distance  $d$  de leurs centres  $O$  et  $I$  :  $d^2 = R(R-2r)$ . On constate que le centre de gravité  $G$ , l'orthocentre  $H$  et les points de Gergonne et de Nagel  $Na$  de ces triangles décrivent des cercles.



- Triangle et 2 coniques

La propriété est encore valable si on remplace les 2 cercles par 2 coniques, circonscrite et inscrite ; pour un triangle donné et 2 coniques, circonscrite et inscrite, il existe une infinité de triangles inscrits dans la 1<sup>ère</sup> conique et circonscrits à la 2<sup>nde</sup>.

- Polygone et 2 coniques

La propriété est toujours valable si on remplace le triangle par un polygone. On donne 2 coniques, on trace par un point de la 1<sup>ère</sup> une tangente à la 2<sup>nde</sup>, qui recoupe la 1<sup>ère</sup> en un 2<sup>nd</sup> point, d'où l'on trace la 2<sup>nde</sup> tangente à la 2<sup>nde</sup> conique. On répète l'opération autant de fois que nécessaire. Si le polygone ainsi tracé ne se referme jamais, la propriété n'est pas vérifiée ; s'il se referme au bout d'un nombre fini d'opérations, la propriété est vraie pour tout point de la 1<sup>ère</sup> conique avec le même nombre d'opérations.

- Généralisation

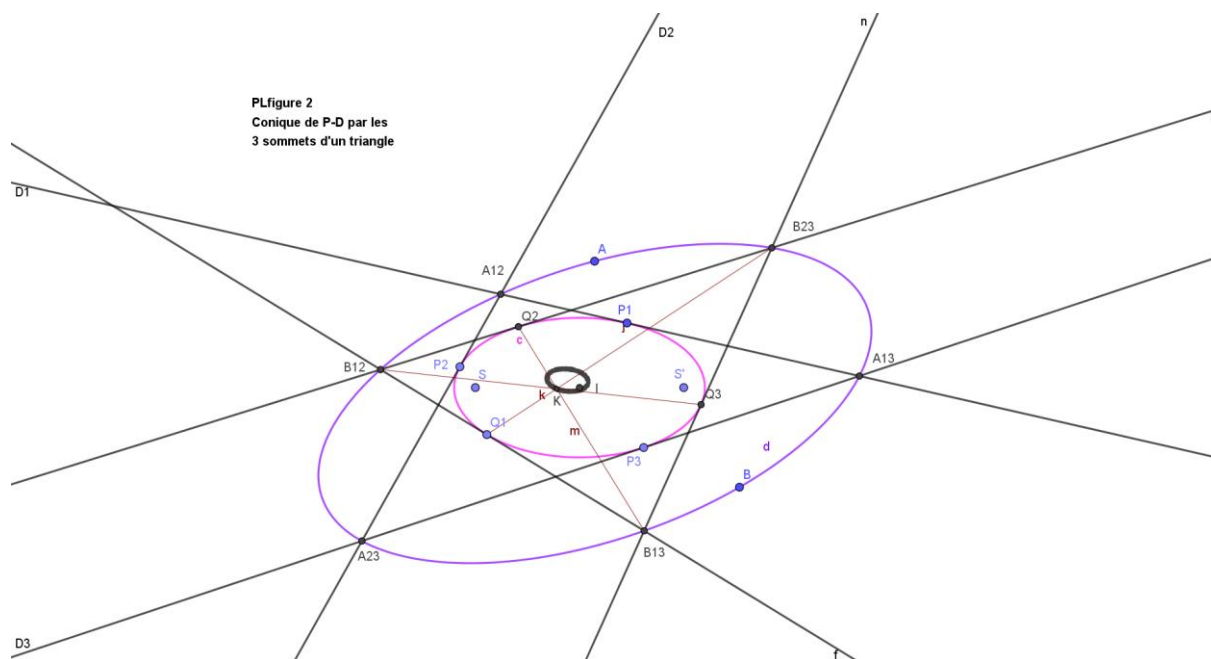
Enfin, la propriété reste valable si on remplace la 1<sup>ère</sup> conique par une courbe de Poncelet-Darboux ou la 2<sup>nde</sup> par une courbe de Siebeck-Marden.

## 2) Courbes de Poncelet-Darboux ou P-D (cf figures 2, 3 et 4)

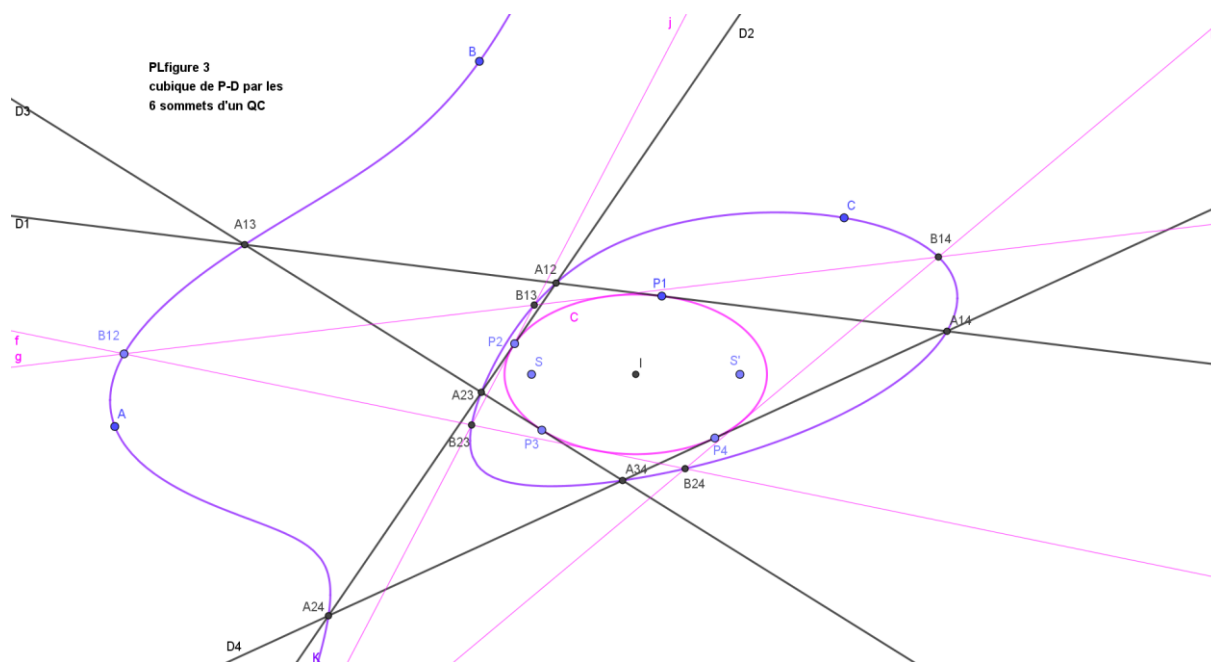
Les courbes K de Poncelet-Darboux sont des courbes de degré  $n-1$  passant par les  $\frac{1}{2}n(n-1)$  sommets d'un  $n$ -latéral formé par  $n$  droites tangentes à une conique C.

Ces courbes sont ainsi :

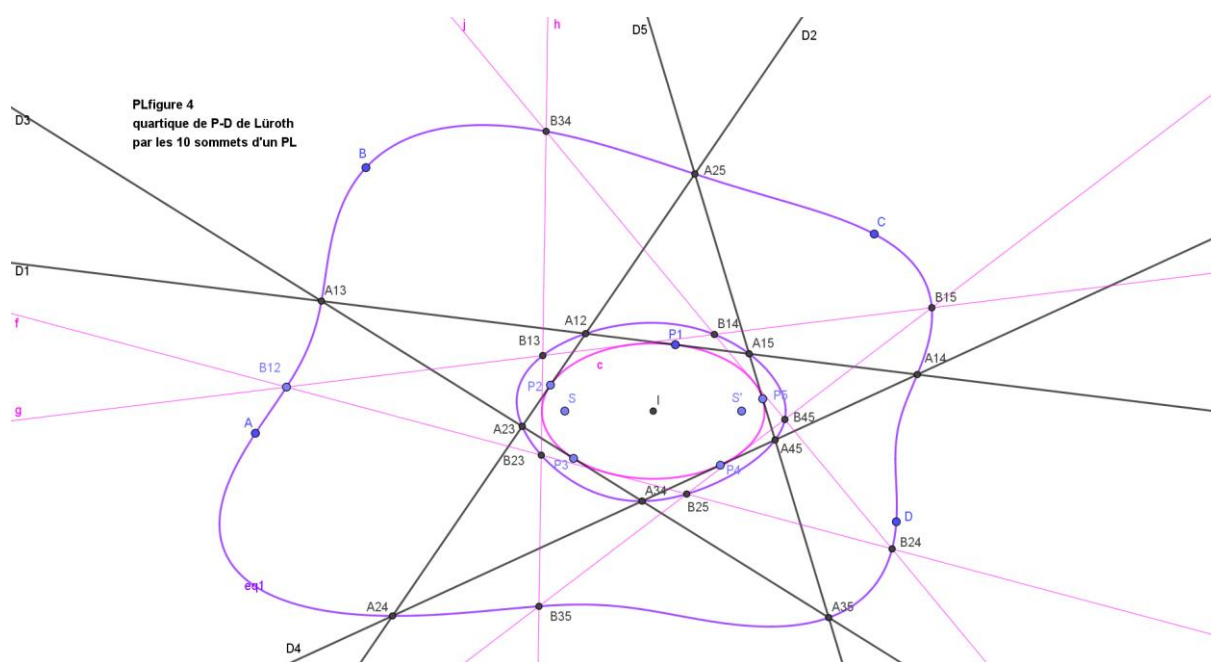
- pour  $n = 3$  une conique par les 3 sommets d'un triangle



- pour  $n = 4$  une cubique par les 6 sommets d'un quadrilatère complet



- pour  $n = 5$  une quartique par les 10 sommets d'un pentalatéral complet

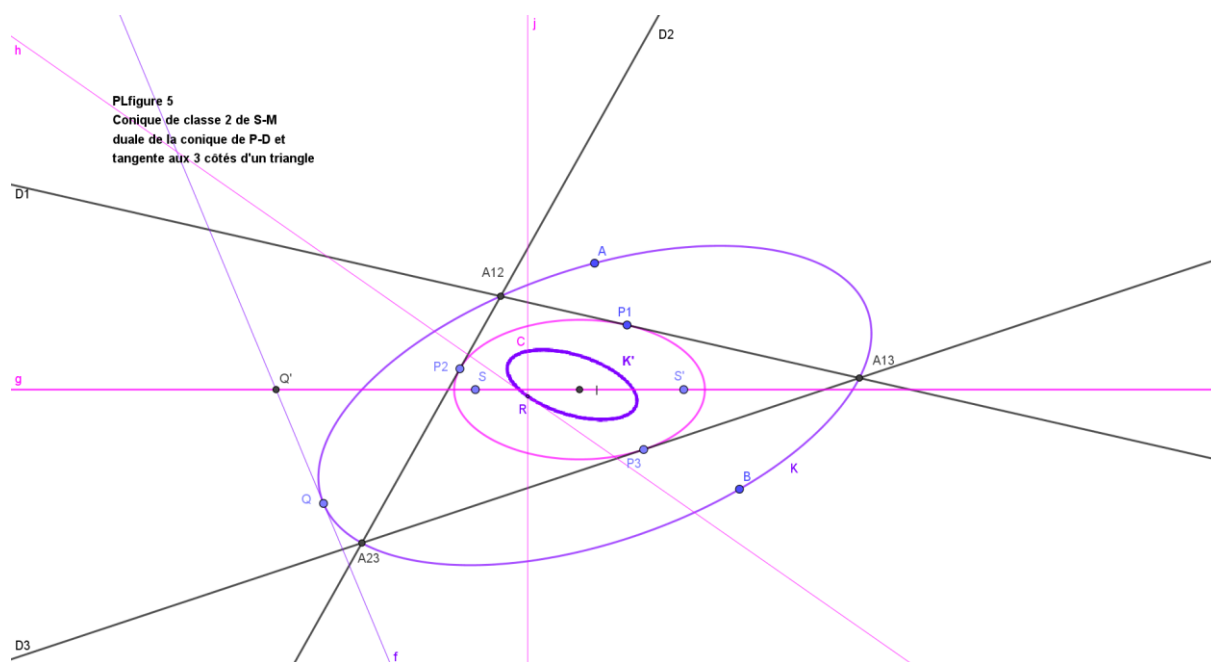


### 3) Courbes de Siebeck-Marden ou S-M (cf figures 5, 6 et 7)

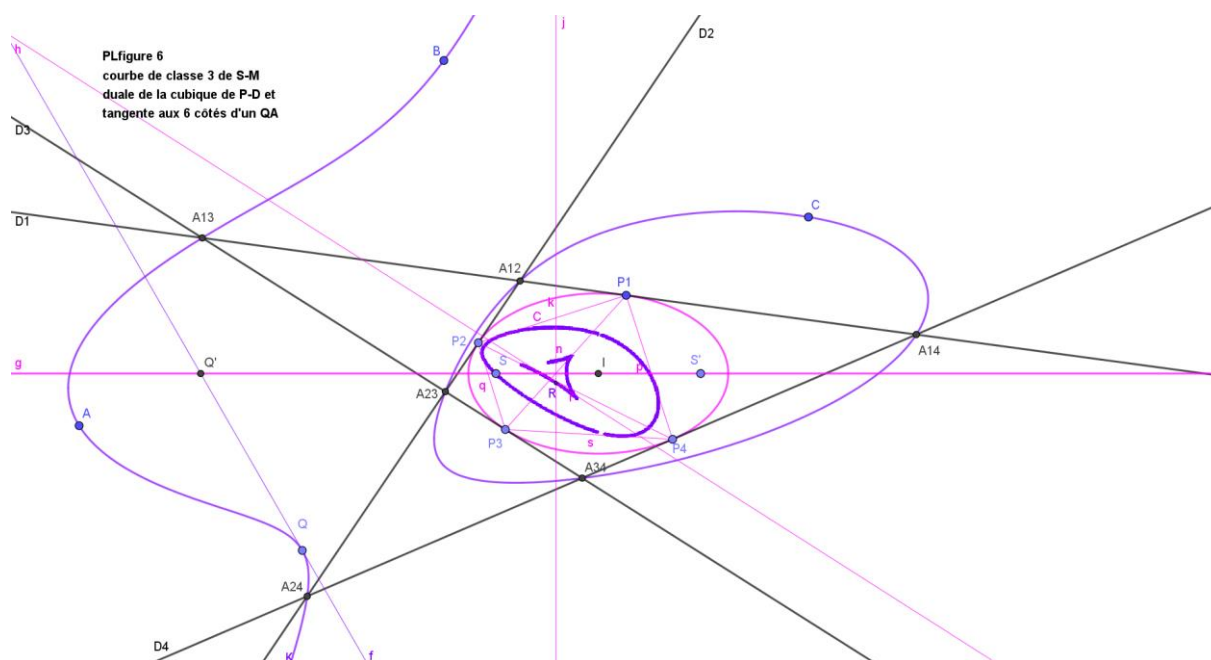
Les courbes  $K'$  de Siebeck-Marden sont des courbes de classe  $n-1$  tangentes aux  $\frac{1}{2}n(n-1)$  côtés d'un  $n$ -points inscrit dans une conique  $C$ .

Ces courbes sont ainsi :

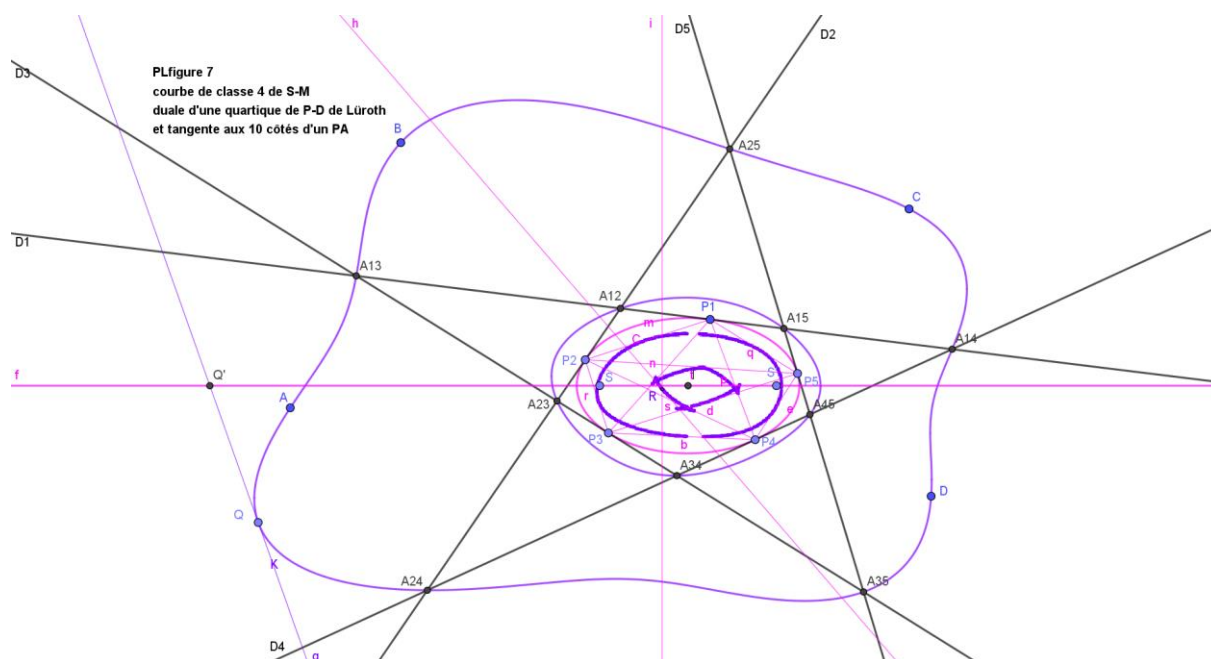
- pour  $n = 3$  une conique tangente aux 3 côtés d'un triangle



- pour  $n = 4$  une courbe de classe 3 tangente aux 6 côtés d'un quadrangle



- pour  $n = 5$  une courbe de classe 4 tangente aux 10 côtés d'un pentangle



Il existe dès lors une infinité de  $n$ -droites inscrits dans une courbe de P-D et circonscrits à la conique, triangles à 3 sommets pour la conique, quadrilatères complets à 6 sommets pour la cubique et pentaléraux complets à 10 sommets pour la quartique.

Il existe aussi bien sûr une infinité de  $n$ -P inscrits dans la conique et circonscrits à la courbe S-M, triangles à 3 côtés pour la conique de classe 2, quadrangles à 6 côtés pour la courbe de classe 3 et pentangles à 10 côtés pour la courbe de classe 4.

Les courbes de Poncelet-Darboux et les courbes de Siebeck-Marden sont duales en utilisant la dualité pôle/polaire par rapport à la conique ; chacune des 2 courbes est ainsi le lieu des pôles par rapport à la conique inscrite des tangentes à l'autre ou l'enveloppe des polaires par rapport à la conique des points de l'autre.

Pour le QA/QC dual (\*), on peut utiliser cette dualité à la place de la dualité par rapport à la conique inscrite ; toute conique inscrite du QC est la duale d'une conique circonscrite du QA. Toute cubique passant par les 6 sommets du QC est une courbe P-D pour toutes les coniques inscrites et sa duale, courbe de classe 3 tangente aux 6 côtés du QA dual, est une courbe S-M pour toutes les coniques circonscrites au QA dual.

(\*) Voir le 4<sup>ème</sup> article Le QA et le QC comme figures duales ...

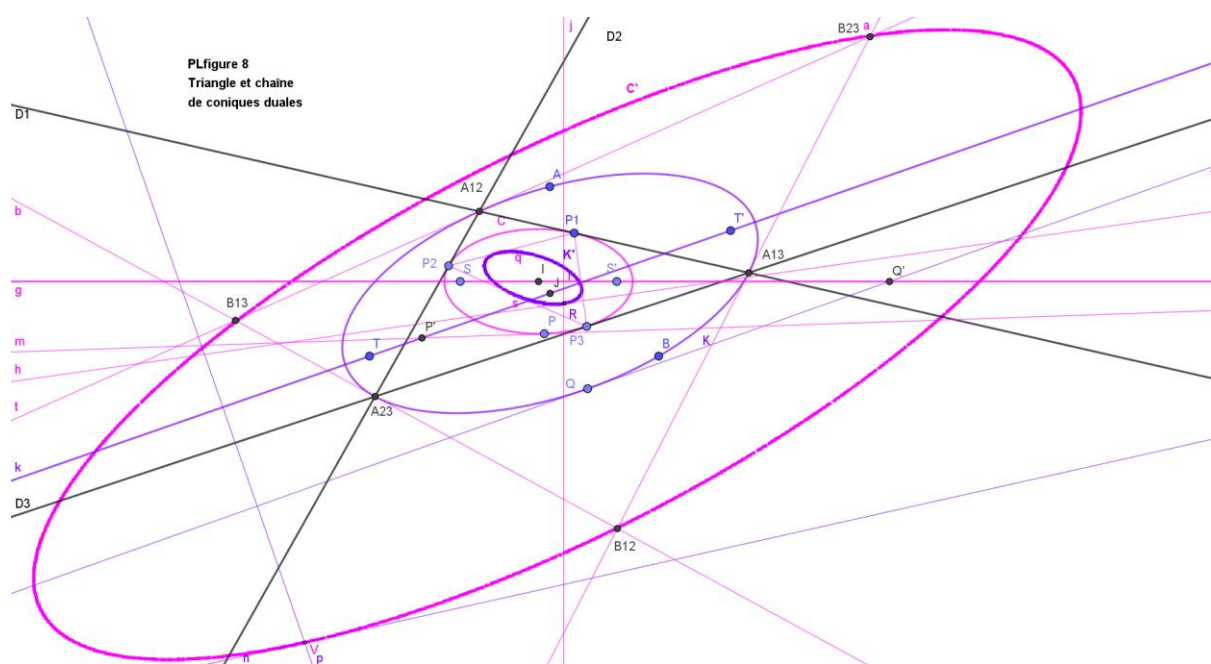
## B. Cas du triangle

Chaîne de coniques  
(cf figure 8)

Pour un triangle donné, une conique circonscrite  $K$  et une conique inscrite  $C$ , il y a une infinité de triangles ayant les mêmes coniques circonscrite et inscrite.  $K$  est en position P-D vis-à-vis de  $C$  ou  $C$  en position S-M vis-à-vis de  $K$ . Si on appelle  $K'$  la conique duale de  $K$  par rapport à  $C$ ,  $C$  est alors en position P-D vis-à-vis de  $K'$  et  $K'$  en position S-M vis-à-vis de  $C$ .

On peut bien entendu effectuer l'opération en sens inverse pour déterminer la conique  $C'$ , duale de  $C$  par rapport à  $K$ . On peut ensuite répéter les 2 opérations et déterminer les coniques  $C''$ , duale de  $C$  par rapport à  $K'$ , et  $K''$ , duale de  $K$  par rapport à  $C'$ , puis des coniques duales de  $K'$  par rapport à  $C''$  et de  $C'$  par rapport à  $K''$  ...

On détermine ainsi de proche en proche une chaîne de coniques telles que, pour 3 consécutives, la 1<sup>ère</sup> et la 3<sup>ème</sup> sont duales par rapport à la 2<sup>nde</sup>. Il existe toujours une infinité de triangles inscrits dans une de ces coniques et circonscrits à la suivante (ou l'inverse).



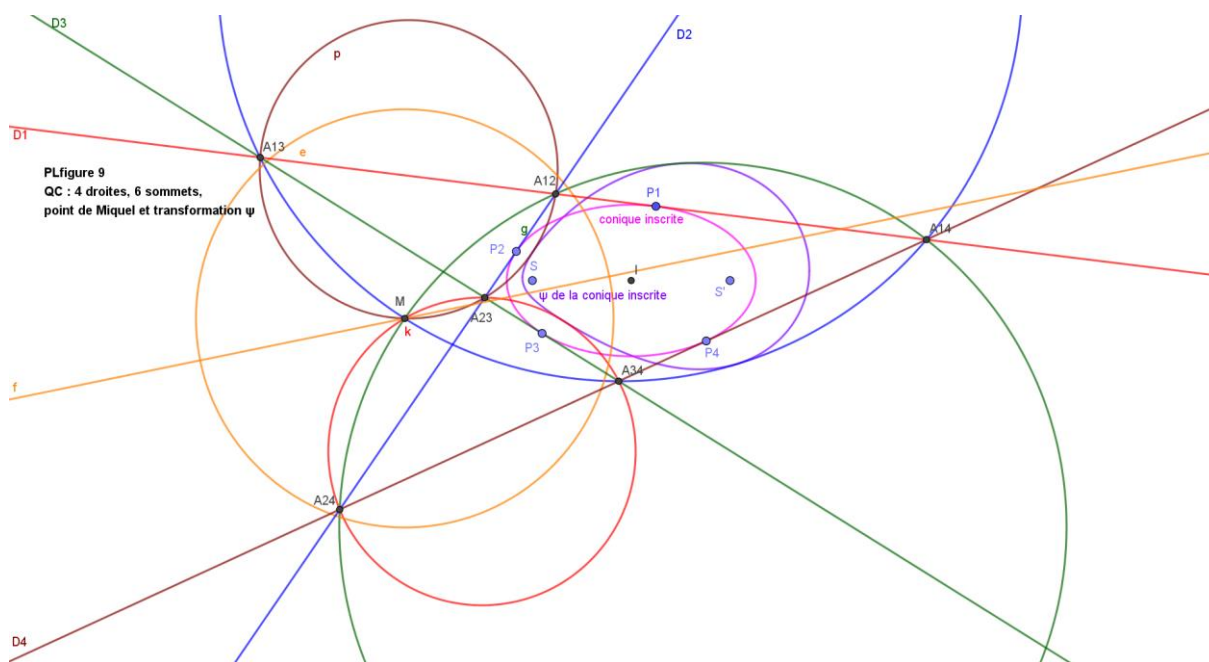
### C. Cas du Quadrilatère Complet ou QC

- 1) 4 droites, 6 sommets, point de Miquel et transformation  $\psi$   
(cf figure 9)

4 droites forment un quadrilatère complet et se coupent en 6 points. (La figure duale est un quadrangle de 4 sommets et 6 côtés).

3 des 4 droites se coupent en 3 points et déterminent un triangle ; les 4 cercles circonscrits à ces triangles ont un point commun, le point de Miquel  $M$  du QC.

Il existe une transformation  $\psi$  de Moebius, associant une symétrie axiale et une inversion par rapport à un cercle de centre  $M$ , qui échange 2 à 2 les sommets opposés du QC et les cercles circonscrits aux triangles de 3 droites et les 4èmes droites.

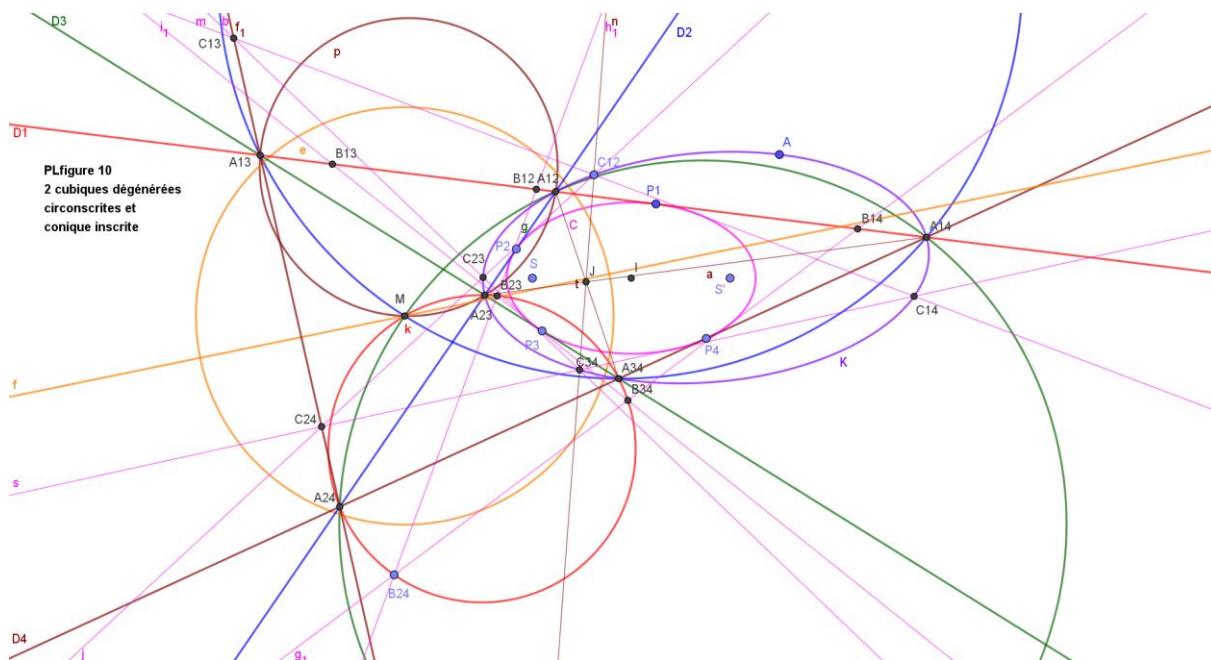


- 2) Cubiques P-D vs conique inscrite  
(cf figures 10 et 11)

Une cubique quelconque passant par les 6 sommets d'un QC est une courbe P-D pour toute conique inscrite du QC.

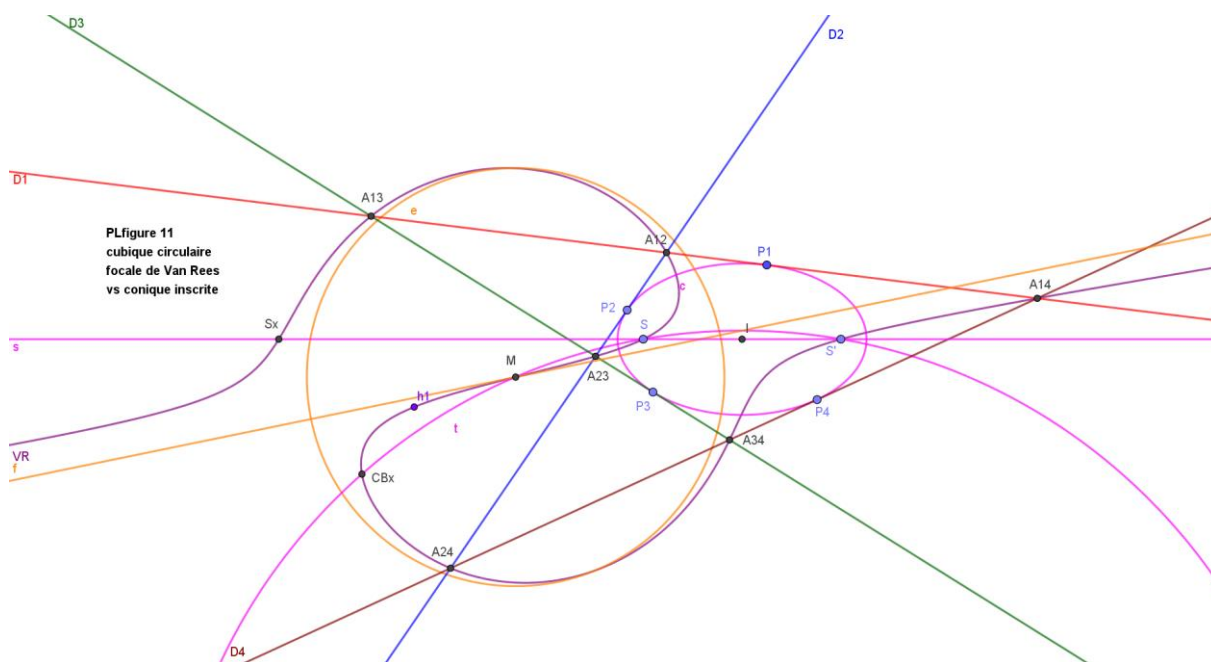
On peut en trouver plusieurs exemples :

- un cercle par les intersections de 3 droites, passant par le point de Miquel  $M$ , et la 4<sup>ème</sup> droite forment une cubique circulaire dégénérée. Chacun des 4 cercles constitue une courbe P-D vis-à-vis de la conique inscrite ; il existe une infinité de triangles inscrits dans le cercle et circonscrits à la conique et leurs côtés recoupent la 4<sup>ème</sup> droite en 3 points. Les sommets du triangle et les 3 points déterminent un nouveau QC, qui a le même point de Miquel et la même transformation  $\psi$ .
- une conique par les 4 sommets d'un QA du QC et la 3<sup>ème</sup> diagonale forment une cubique non circulaire dégénérée. Tous les QA inscrits dans la conique et circonscrits à la conique inscrite ont le même sommet du triangle diagonal et la même 3<sup>ème</sup> diagonale, qui est la polaire du sommet par rapport à la conique inscrite.



PLfigure 10  
2 cubiques dégénérées  
cirscrites et  
conique inscrite

- une cubique non dégénérée passant par les 6 sommets du QC, le point de Miquel M et 2 points conjugués  $\psi$  est circulaire et  $\psi$ -invariante.
- La plus connue est la courbe circulaire focale de Van Rees, lieu des foyers des coniques inscrites du QC (ces foyers sont conjugués  $\psi$ ).  $SS'$  recoupe VR en un point S et le conjugué  $\psi$  de S est un point CB, 4<sup>ème</sup> intersection avec VR du cercle passant par M, S et S'. Ce point CB est le 9<sup>ème</sup> CB point des 6 sommets du QC et de S et S' (çàd qu'il passe une infinité de cubiques par ces 9 points).



PLfigure 11  
cubique circulaire  
focale de Van Rees  
vs conique inscrite

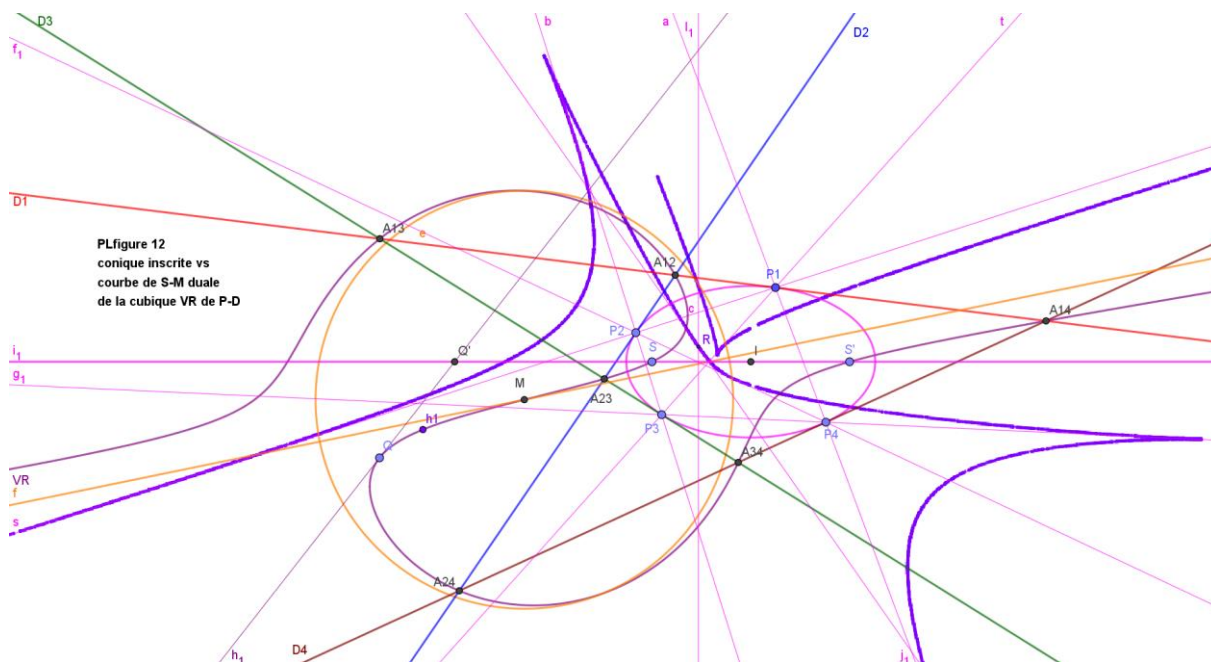
### 3) Conique inscrite vs courbes de S-M de classe 3 (cf figure 12)

La figure duale du QC est le QA à 4 sommets et 6 côtés.

Une courbe de classe 3 tangente aux 6 côtés d'un QA inscrit dans une conique est une courbe de S-M, duale d'une cubique de P-D passant par les 6 sommets du QC dual.

On retrouve ainsi :

- la courbe duale d'un cercle et d'une droite est formée d'une conique, duale du cercle par rapport à la conique inscrite, et du point de contact de la droite avec la conique inscrite. Les QA duaux des QC correspondants sont formés des sommets des triangles inscrits dans la conique inscrite et circonscrits à la conique duale du cercle et du point ; 3 côtés du triangle sont tangents à la conique duale, les 3 autres passent par le point.
- la courbe duale d'une conique circonscrite à un QA du QC et d'une diagonale est formée d'une conique, duale de la conique par rapport à la conique inscrite et d'un point, pôle de la diagonale par rapport à la conique inscrite. Les QA duaux des QC correspondants sont formés des sommets des triangles inscrits dans la conique inscrite et circonscrits à la conique duale de la conique et du point ; 3 côtés du triangle sont tangents à la conique duale, les 3 autres passent par le point.
- la courbe S-M de classe 3, duale de la cubique circulaire focale de Van Rees ; cette courbe a 3 points de rebroussement, correspondant aux 3 points d'inflexion de la cubique.



## D. Cas du Pentalatéral ou PL

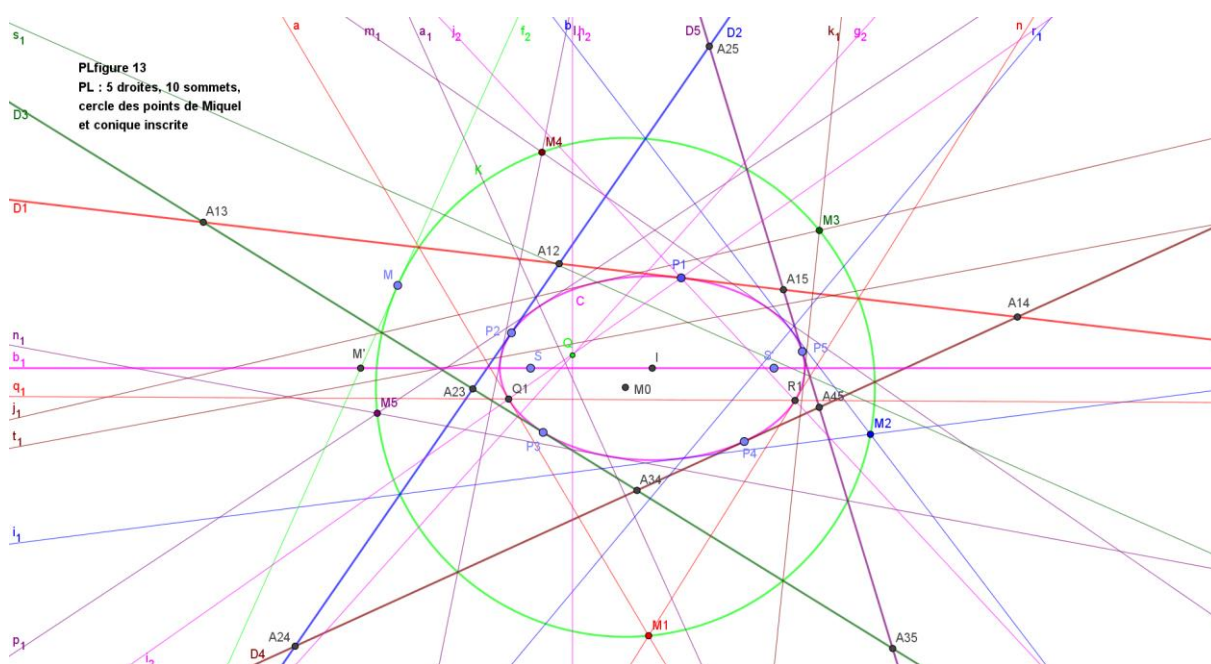
- 1) 5 droites, 10 sommets, cercle des points de Miquel et conique inscrite (cf figure 13)

5 droites forment un pentalatéral et se coupent en 10 points ; elles déterminent une conique inscrite unique. (La figure duale est un pentangle de 5 sommets et 10 côtés).

4 des 5 droites forment un QC avec 6 sommets parmi les 10 points et un point de Miquel ; les 5 points de Miquel sont cocycliques.

Il est alors remarquable que les 5 triangles formés par un point de Miquel de 4 droites et la 5<sup>ème</sup> droite déterminent un triangle inscrit dans le cercle des points de Miquel et circonscrit à la conique. En application du porisme de Poncelet, le cercle constitue une courbe P-D vis-à-vis de la conique ; pour tout point M du cercle, on peut tracer les 2 tangentes à la conique qui la recouperont en 2 points déterminant une droite D tangente à la conique.

De plus, chaque point de contact de cette droite D avec la conique inscrite détermine avec la polaire du point de Miquel M correspondant par rapport à la conique un triangle inscrit dans la conique inscrite et circonscrit à une seconde conique inscrite dans le PL formé par les polaires des 5 points de Miquel par rapport à la conique inscrite. Cette 2<sup>nde</sup> conique est la duale du cercle par rapport à la conique inscrite et constitue une courbe S-M vis-à-vis de cette conique.



2) 5 droites, 5 cubiques de Van Rees et transformation  $\Psi$   
(cf figures 14, 15, 16 et 17)

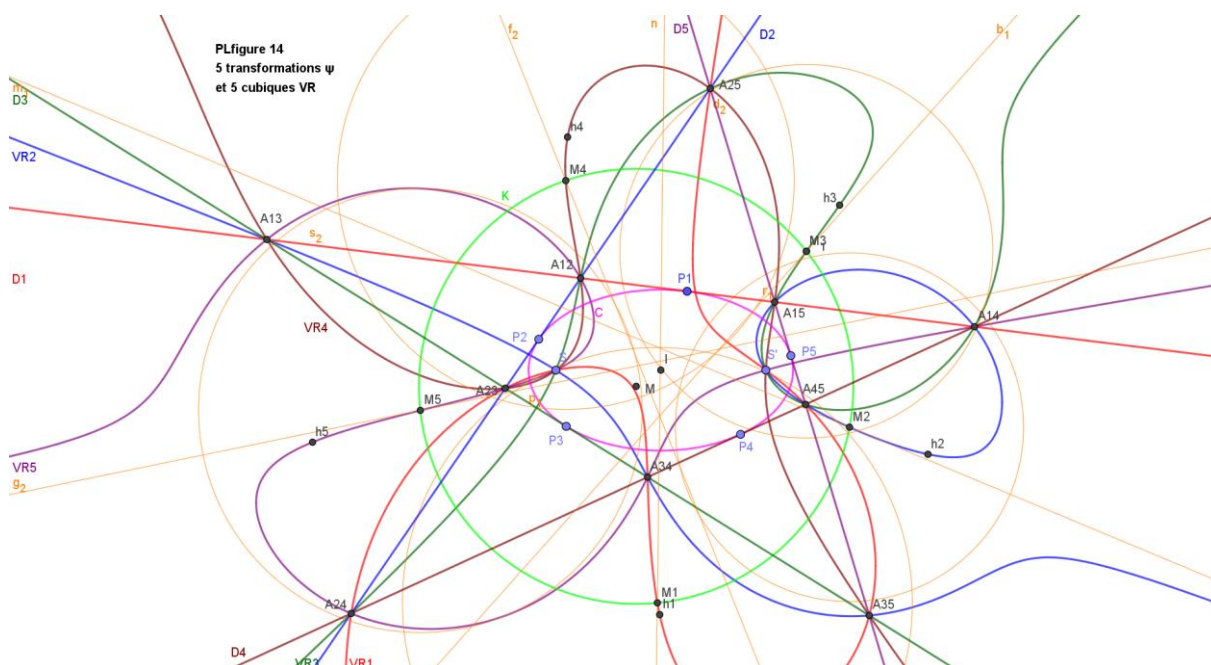
On a vu, pour le QC, que les sommets, le point M et les 2 points circulaires forment un CB système de 9 points, puisque les 4 cubiques circulaires dégénérées formées d'un cercle circonscrit aux intersections de 3 droites et de la 4<sup>ème</sup> droite passent par ces 9 points.

La transformation  $\psi$  échange les sommets opposés du QC et les cercles et les droites. Toute cubique passant par les 6 sommets, M et 2 points conjugués  $\psi$  est à la fois circulaire et  $\psi$ -invariante. La plus connue est la cubique circulaire focale de Van Rees.

Pour le PL, les 10 sommets, les 2 foyers de la conique inscrite et les 2 points circulaires forment un CB système de 14 points, puisque les 5 quartiques circulaires dégénérées formées d'une VR de 4 droites et de la 5<sup>ème</sup> droite passent par ces 14 points.

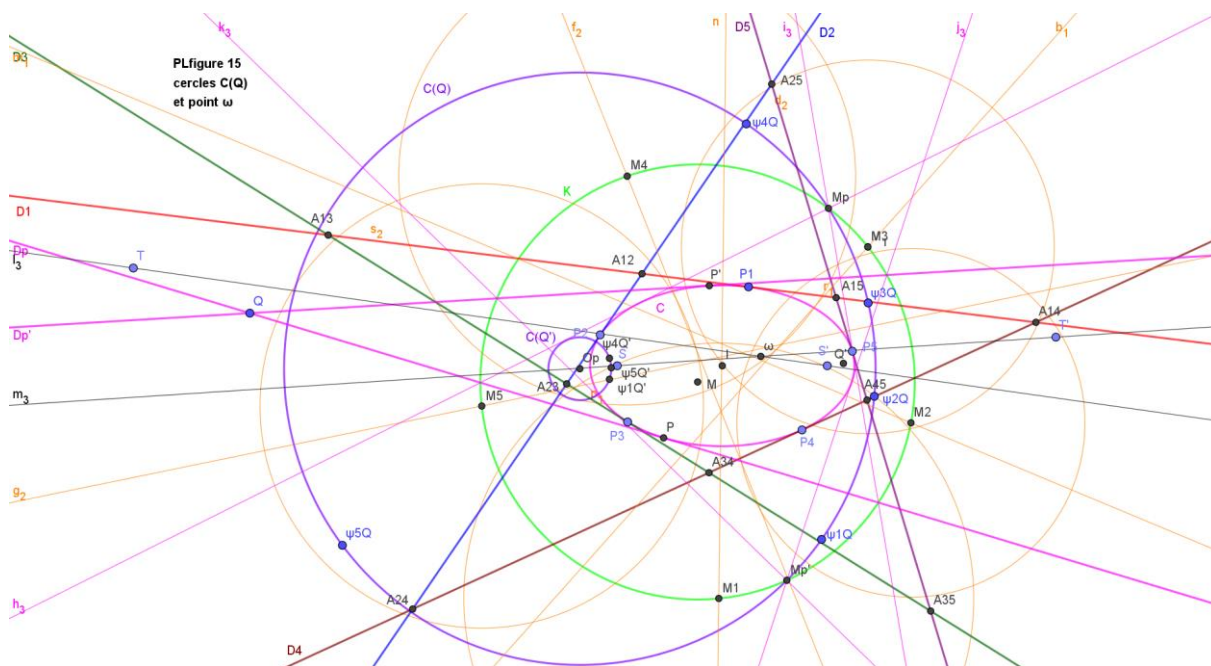
On va dès lors chercher par analogie à mettre en évidence une transformation  $\Psi$  qui associe à un sommet du PL 3 autres sommets (ceux qui ne sont pas sur les 2 droites passant par ce sommet) et à une droite la VR des 4 autres droites. Toute quartique passant par les 10 sommets, un point Q et ses 3 transformés  $\Psi$  passe nécessairement par les 2 foyers S et S' et est à la fois circulaire et  $\Psi$ -invariante.

La différence entre le QC et le PL est que 8 points ne déterminent pas une cubique alors que 14 points déterminent une quartique. Une cubique passant par les 6 sommets d'un QC ne passe pas nécessairement par M (elle n'est alors pas circulaire) alors qu'une quartique passant par les 10 sommets du PL, un point Q et ses 3 transformés  $\Psi$  est circulaire et passe par les points S et S'. En ce sens, la transformation  $\Psi$  du PL est plus forte que la transformation  $\psi$  du QC.



On va utiliser, pour la construction d'une quartique circulaire passant par les 10 sommets du PL, un point Q et ses transformés  $\Psi$ , Q1, Q2 et Q3 (ainsi que par les points S et S'), les cercles C(Q) et la conique des CB points.

- le cercle  $C(Q)$  est, pour un point  $Q$  quelconque, le lieu des transformés  $\psi(Q)$  dans toutes les transformations  $\psi$  centrées sur le cercle des points de Miquel et échangeant les foyers  $S$  et  $S'$  de la conique inscrite.  $C(Q)$  est une conique P-D pour la conique inscrite. On appelle  $T$  et  $T'$  les inverses des foyers  $S$  et  $S'$  de la conique inscrite par rapport au cercle des points de Miquel ;  $TS'$  et  $T'S$  se coupent en un point  $\omega$ . On considère l'inversion de centre  $\omega$  qui échange  $S$  et  $T'$  et  $S'$  et  $T$  ; elle laisse le cercle des points de Miquel globalement inchangé. Deux points  $Q$  et  $Q'$  inverses dans cette inversion ont même centre de leurs cercles  $C(Q)$  et  $C(Q')$ . Si le point  $Q$  est à l'infini, les tangentes issues de  $Q$  à la coniques inscrites sont parallèles, les points de contact  $P$  et  $P'$  sont symétriques par rapport au centre  $I$  de la conique inscrite et les points  $M$  et  $M'$  correspondants sur le cercle de Miquel sont alignés avec  $\omega$ . Le cercle  $C(Q)$  est alors le cercle  $C(\omega)$ , çàd le cercle des points de Miquel.

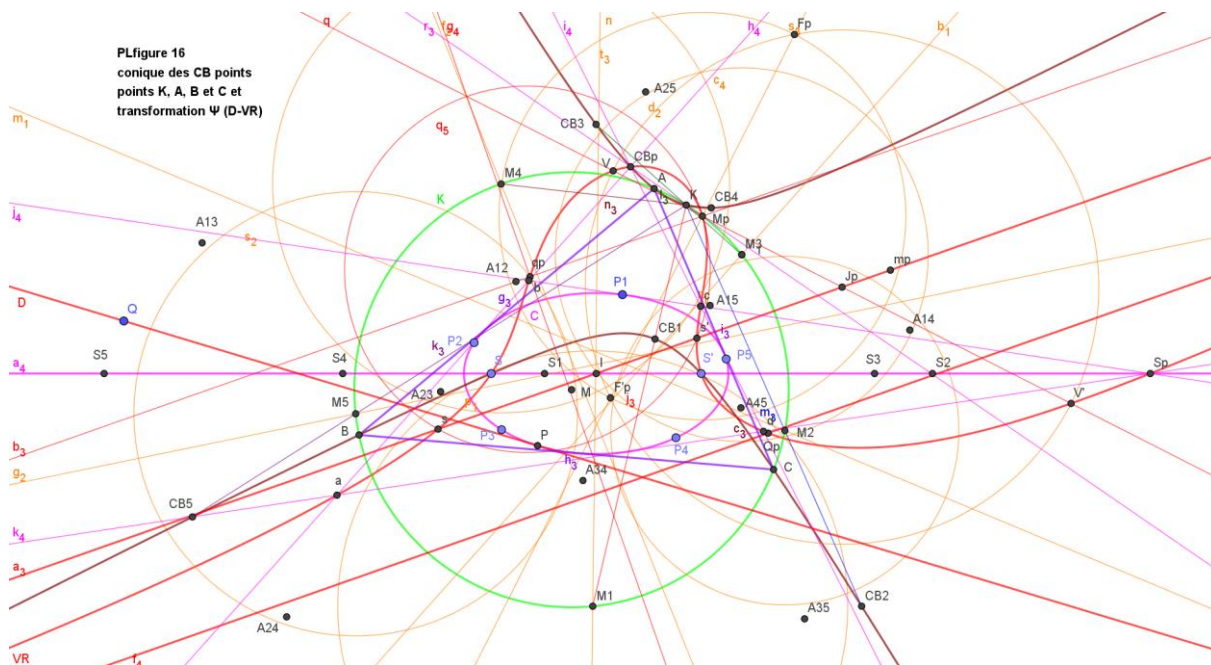


- la conique des CB points est déterminée par les 5 points CB des 5 cubiques VR de 4 des 5 droites (cf ci-dessus figure 14) ; cette conique passe par  $S$  et  $S'$ . Elle coupe le cercle des points de Miquel en 4 points  $K, A, B$  et  $C$ . Le point  $K$  est aligné avec les 5 couples de points  $M$  et  $CB$ . Les 3 autres points déterminent un triangle inscrit à la fois dans le cercle des points de Miquel et dans la conique des CB points et circonscrits à la conique inscrite (la conique des CB points et le cercle des points de Miquel sont en position P-D vis-à-vis de la conique inscrite).

On est alors en mesure de définir la transformation  $\Psi$ , qui associe à chacune des 5 droites du PL la VR du QC formé par les 4 autres. A chaque droite  $D_p$  tangente à la conique inscrite en  $P$ , on associe le point de Miquel  $M_p$  correspondant (la droite coupe le cercle des points de Miquel en 2 points et les 2 2ndes tangentes en ces points à la conique inscrite se coupent en  $M_p$  sur le même cercle). On détermine le point  $CB_p$  comme 2<sup>nde</sup> intersection de  $KM_p$  avec la conique des CB points ; son conjugué  $\psi$  dans la transformation  $\psi$  est un point  $S_p$  sur la droite  $SS'$ . La droite de Newton passe par  $I$ , milieu de  $SS'$  et par  $m_p$ , milieu de  $CB_pS_p$ .

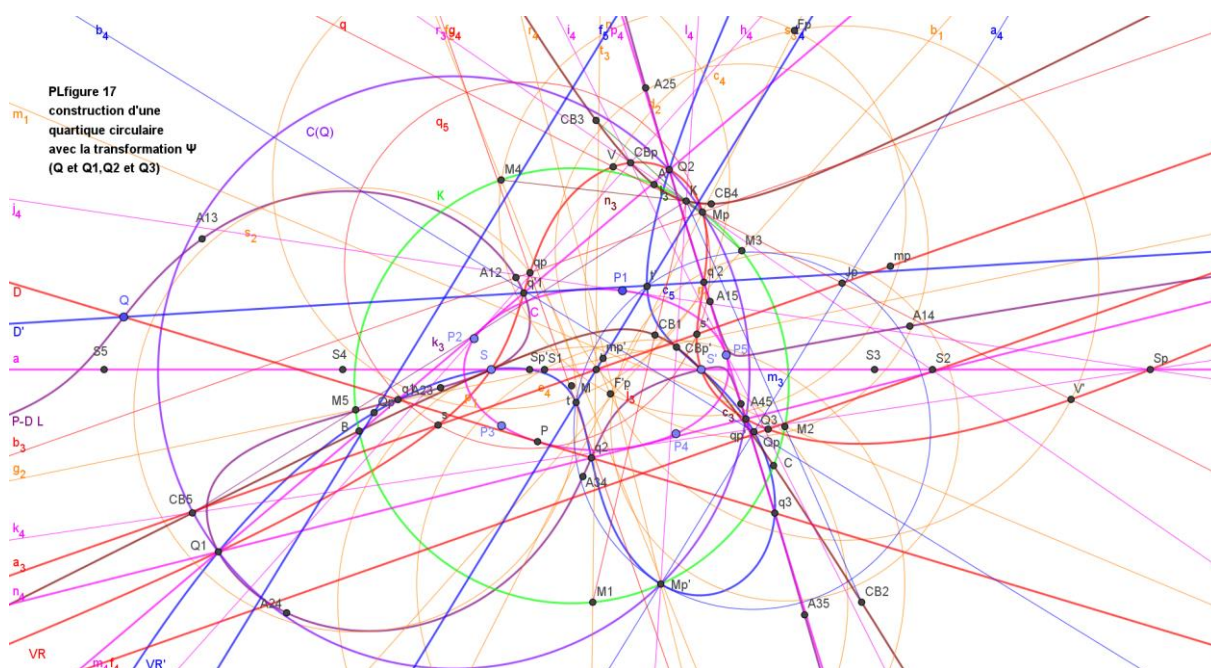
On associe à la droite  $D_p$  la VRp déterminée par son foyer  $M_p$ , sa transformation  $\psi$  et sa droite de Newton ; elle passe par  $M_p$ ,  $S$  et  $S'$  et  $CB_p$  et  $Sp$ .

Pour tout point  $Q$  de cette droite, les 3 points associés dans la transformation  $\Psi$  sont les 3 intersections autres que  $M_p$  du cercle transformé de  $D_p$  dans la transformation  $\psi$  de centre  $M_p$  qui échange  $S$  et  $S'$  avec la VRp. Ce cercle est le cercle  $C(Q)$ .



Pour ce point  $Q$ , la 2<sup>nd</sup>e tangente à la conique inscrite est une droite  $D_p'$  à laquelle on peut associer une VRp'. Les 3 points  $Q_1, Q_2$  et  $Q_3$  transformés de  $Q$  dans la transformation  $\Psi$  sont alors les 3 intersections autres que  $S$  et  $S'$  et les points circulaires des 2 VRp et VRp'.

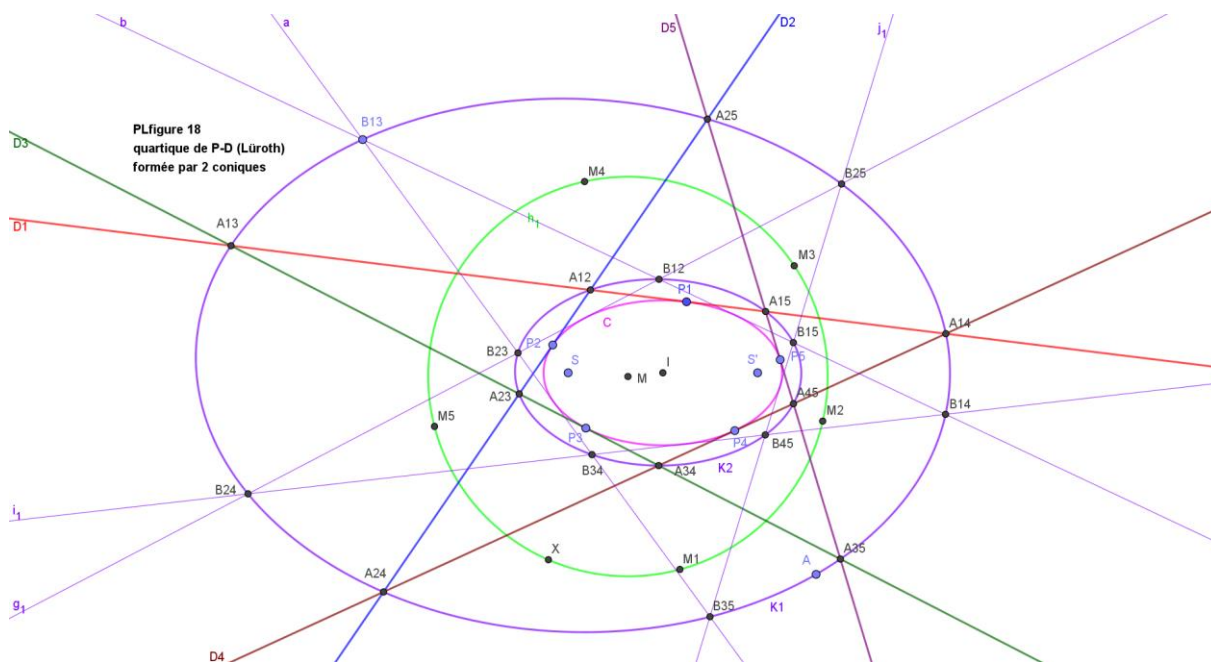
Les côtés du triangle  $Q_1Q_2Q_3$  sont tangents à la conique inscrite et forment avec les 2 tangentes à cette conique issues de  $Q$  un 2<sup>nd</sup> PL. Les 10 sommets du 1<sup>er</sup> PL et les 4 points  $Q, Q_1, Q_2$  et  $Q_3$  déterminent une quartique circulaire passant par  $S$  et  $S'$ .



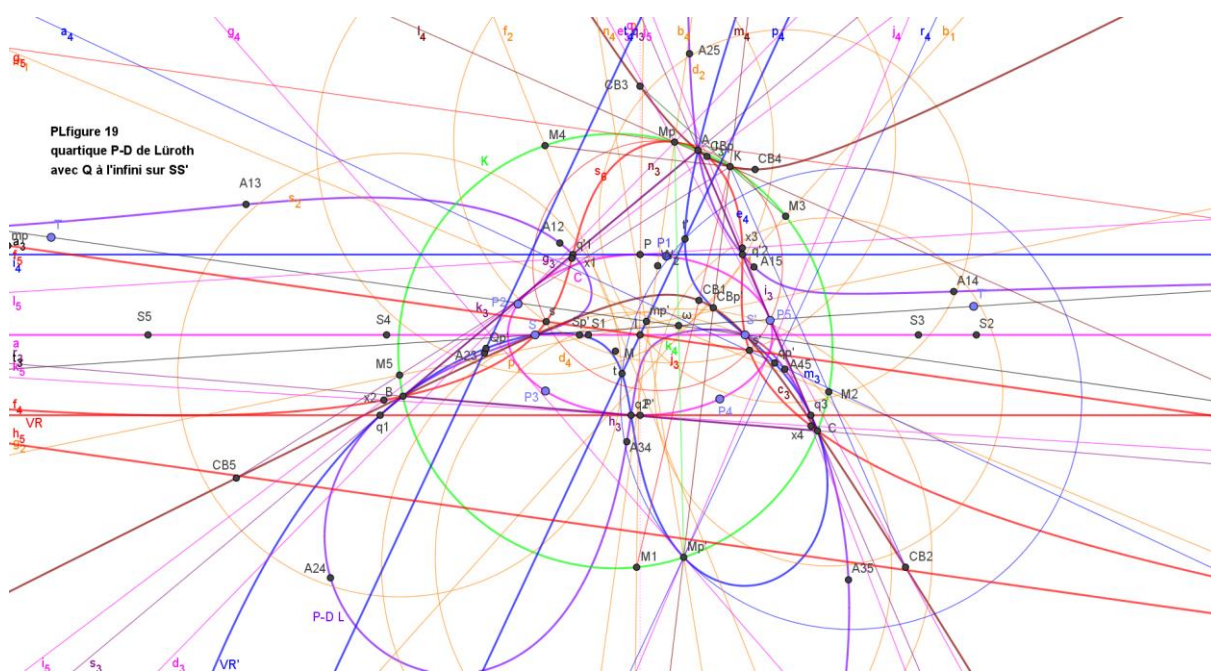
### 3) Quartiques P-D de Lüroth vs conique inscrite

On trouve dans le PL plusieurs exemples intéressants de quartiques P-D de Lüroth :

- 2 droites et le cercle circonscrit aux 3 derniers points (quartique circulaire dégénérée)
- 2 droites et la conique par les 3 derniers points et les foyers S et S' (dégénérée)
- 2 coniques passant chacune par 5 sommets du PL à raison de 2 sur chaque droite forment une quartique dégénérée non circulaire ne passant pas par S et S'



- ci-dessous cas particulier de la quartique de la figure 17 avec Q point à l'infini de la droite SS' et ses transformés  $\Psi$  en A, B et C (avec les 2 cubiques de VR).

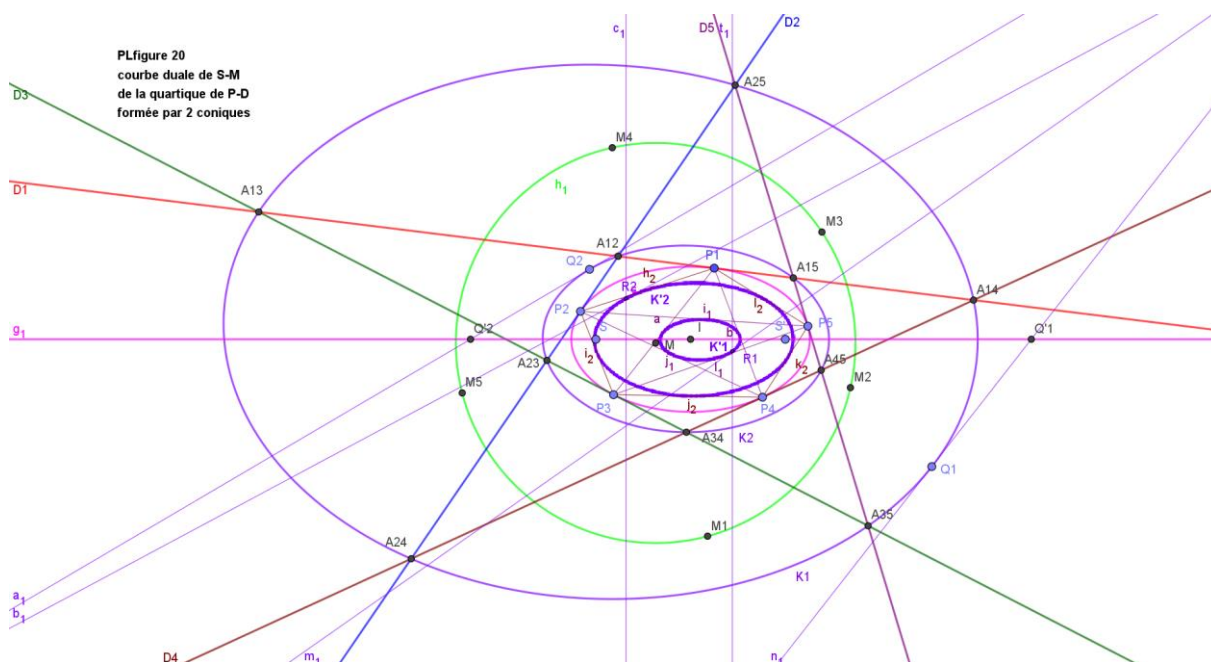


4) Conique inscrite vs courbes de S-M de classe 4  
(cf figures 20 et 21)

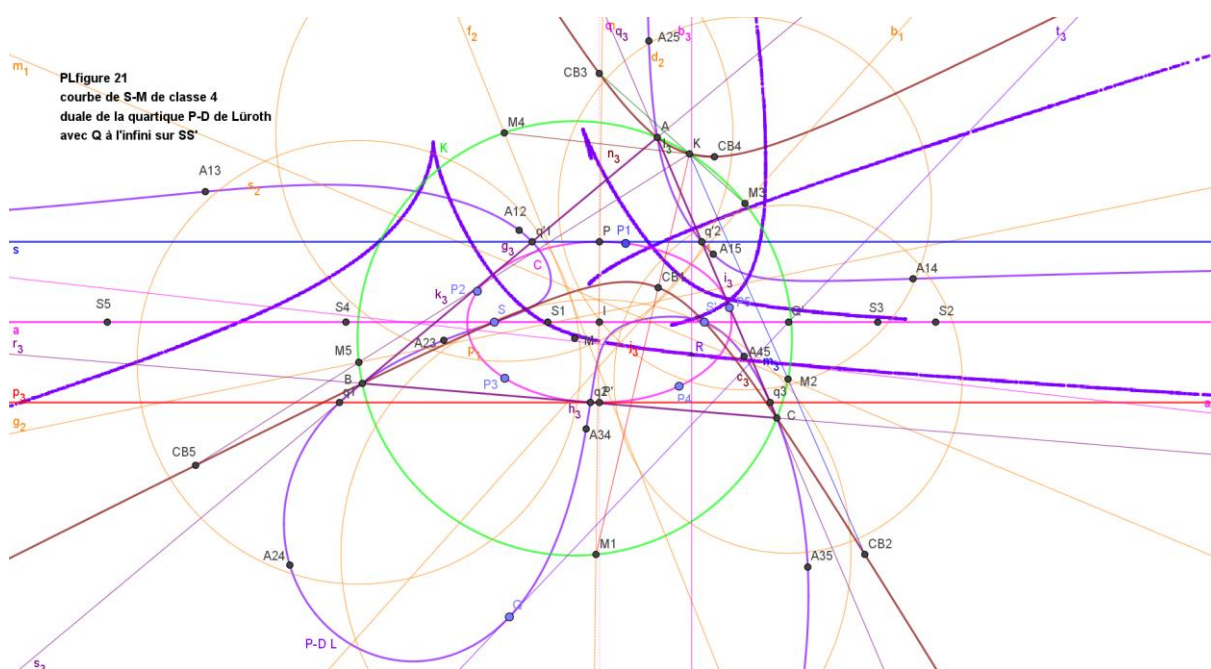
La figure duale du PL est un PA à 5 sommets (points de contact des 5 droites) et 10 côtés ; une courbe de classe 4 tangente aux 10 côtés d'un QA est une corbe de S-M.

Les courbes duales des courbes P-D précédentes sont autant d'exemples de S-M :

- la duale de 2 droites et d'un cercle est formée des 2 points de contact et de la conique duale du cercle
- la duale de 2 droites et d'une conique par S et S' est formée des 2 points de contact et de la conique duale de la conique
- la duale des 2 coniques est formée des 2 coniques duales



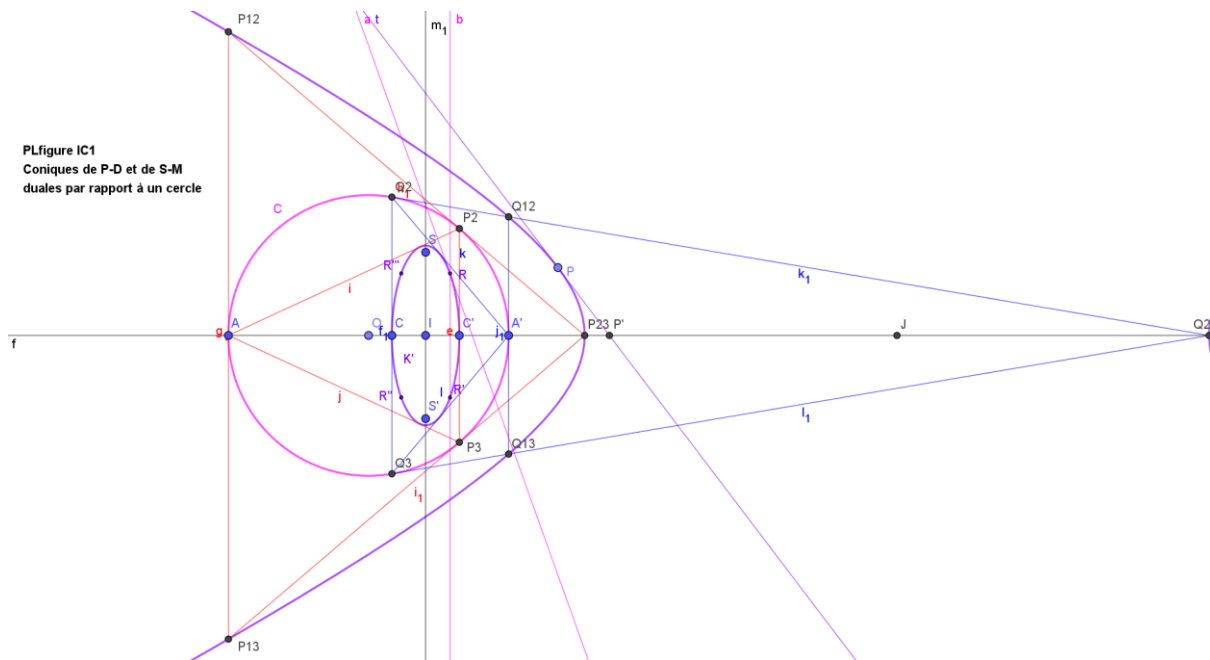
- ci-dessous courbe duale de la quartique de la figure 19 avec Q point à l'infini sur SS'



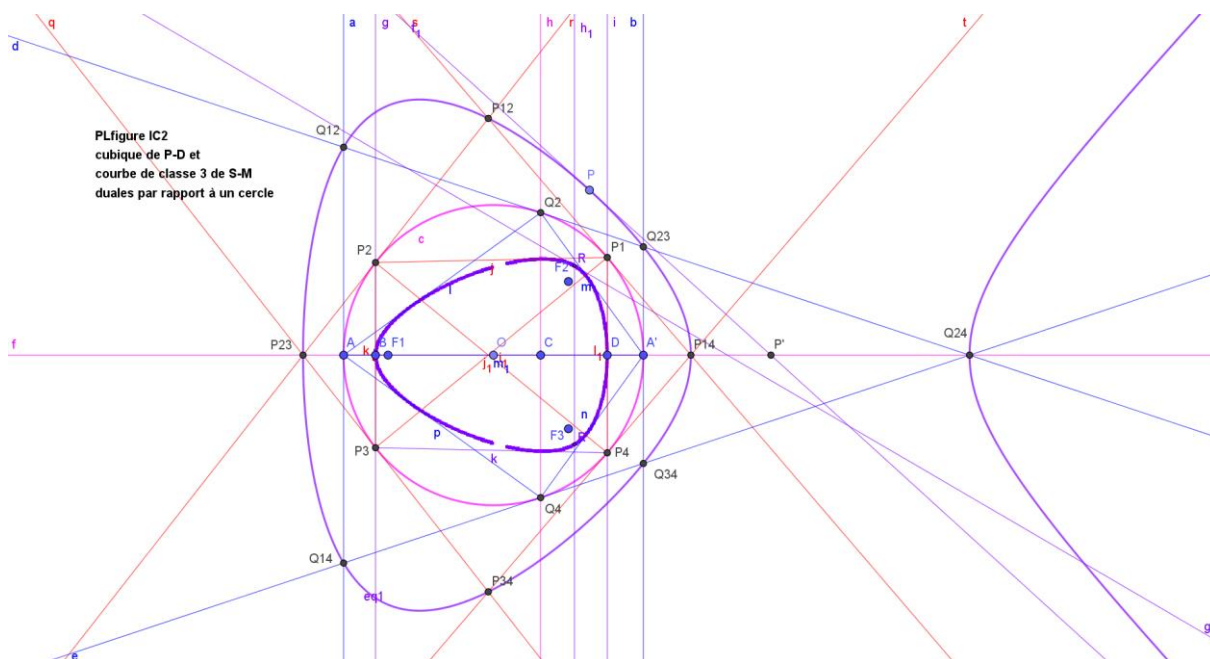
**Annexe : 3 figures de Isabelle Chalendar**  
(cf figures IC1, IC2 et IC3)

On peut maintenant décrypter les 3 courbes de Isabelle Chalendar :

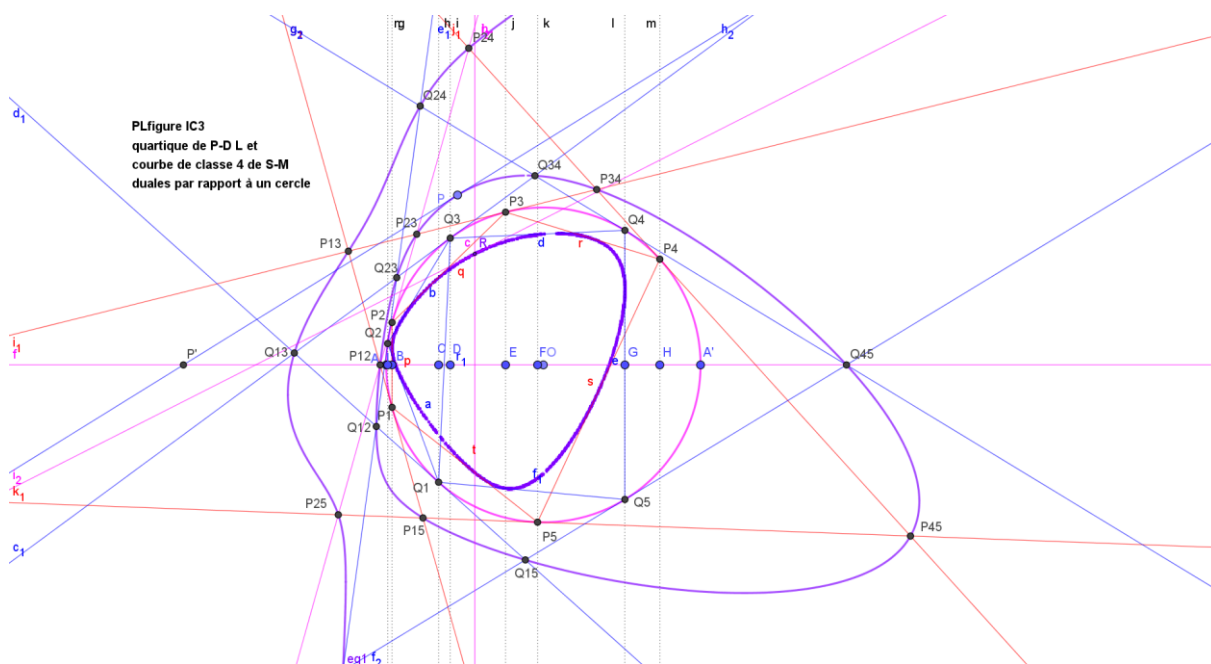
- la première, appelée Poncelet ellipse with triangles, est une conique de S-M de classe 2, duale d'une conique de degré 2 vis-à-vis du cercle ; tous les triangles sont inscrits dans le cercle et circonscrits à la courbe



- la seconde, appelée Symmetrical Poncelet curve with quadrilaterals, est une partie d'une courbe de S-M de classe 3, duale d'une cubique vis-à-vis du cercle ; tous les quadrilonges convexes sont inscrits dans le cercle et circonscrits à la courbe



- la troisième, appelée Asymmetrical Poncelet curve with pentagons, est une partie d'une courbe de S-M de classe 4, duale d'une quartique vis-à-vis du cercle ; tous les pentagones convexes sont inscrits dans le cercle et circonscrits à la courbe



## Bibliographie

- Marcel Berger Géométrie Cédic-Nathan 1977
- Jean-Victor Poncelet Traité des propriétés projectives des figures Bachelier 1822
- Gaston Darboux Leçons sur la théorie générale des surfaces 1889
- Frank Morley On the Lüroth quartic curve 1919
- Jörg Siebeck Über eine neue analytische Behandlungsweise der Brennpunkte 1864
- Morris Marden Geometry of Polynomials 1945
- Vladimir Dragovic Poncelet-Darboux curves and Siebeck-Marden theorem 2011